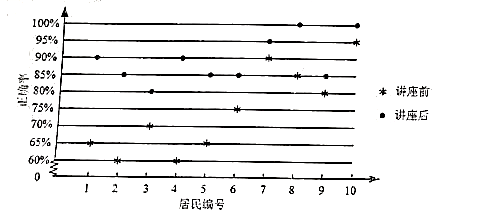
**2022年高考理数真题试卷（全国甲卷）**

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1．（2022·全国甲卷）若 ，则 （　　）

A． B． C． D．

2．（2022·全国甲卷）某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识．为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则（　　）

A．讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B．讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

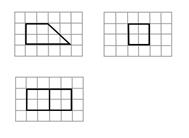
C．讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D．讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3．（2022·全国甲卷）设全集 ，集合 ，则 （　　）

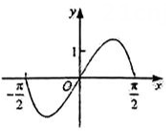
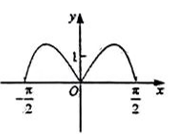
A． B． C． D．

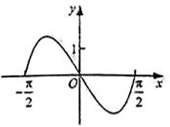
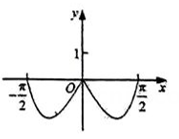
4．（2022·全国甲卷）如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体的体积为（　　）



A．8 B．12 C．16 D．20

5．（2022·全国甲卷）函数 在区间 的图像大致为（　　）

A．​​ B．​​

C．​​ D．​​

6．（2022·全国甲卷）当 时，函数 取得最大值 ，则 （　　）

A．-1 B． C． D．1

7．（2022·全国甲卷）在长方体 中，已知 与平面 和平面 所成的角均为 ，则（　　）

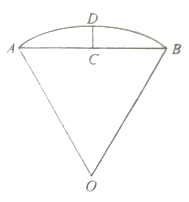
A．

B．AB与平面 所成的角为

C．

D． 与平面 所成的角为

8．（2022·全国甲卷）沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图， 是以O为圆心，OA为半径的圆弧，C是AB的中点，D在 上， ．“会圆术”给出 的弧长的近似值s的计算公式： ．当 时， （　　）



A． B． C． D．

9．（2022·全国甲卷）甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 ，侧面积分别为 和 ，体积分别为 和 ．若 ，则 （　　）

A． B． C． D．

10．（2022·全国甲卷）椭圆 的左顶点为A，点P，Q均在C上，且关于y轴对称．若直线 的斜率之积为 ，则C的离心率为（　　）

A． B． C． D．

11．（2022·全国甲卷）设函数 在区间 恰有三个极值点、两个零点，则 的取值范围是（　　）

A． B． C． D．

12．（2022·全国甲卷）已知 ，则（　　）

A． B． C． D．

**二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。**

13．（2022·全国甲卷）设向量 ， 的夹角的余弦值为 ，且 ，则 　 　．

14．（2022·全国甲卷）若双曲线 的渐近线与圆 相切，则 　 　．

15．（2022·全国甲卷）从正方体的8个顶点中任选4个，则这4个点在同一个平面的概率为　 　．

16．（2022·全国甲卷）已知 中，点D在边BC上， ．当 取得最小值时， 　 　．

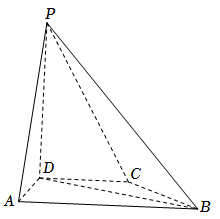
**三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。**

17．（2022·全国甲卷）记 为数列 的前n项和．已知 ．

（1）证明： 是等差数列；

（2）若 成等比数列，求 的最小值．

18．（2022·全国甲卷）在四棱锥 中， 底面 ．



（1）证明： ；

（2）求PD与平面 所成的角的正弦值．

19．（2022·全国甲卷）甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得10分，负方得0分，没有平局．三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军．已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为0.5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立．

（1）求甲学校获得冠军的概率；

（2）用X表示乙学校的总得分，求X的分布列与期望．

20．（2022·全国甲卷）设抛物线 的焦点为F，点 ，过 的直线交C于M，N两点．当直线MD垂直于x轴时， ．

（1）求C的方程：

（2）设直线 与C的另一个交点分别为A，B，记直线 的倾斜角分别为 ．当 取得最大值时，求直线AB的方程．

21．（2022·全国甲卷）已知函数 ．

（1）若 ，求a的取值范围；

（2）证明：若 有两个零点 ，则 ．

**四、选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。**

22．（2022·全国甲卷）在直角坐标系 中，曲线 的参数方程为 （t为参数），曲线 的参数方程为 （s为参数）．

（1）写出 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 的极坐标方程为 ，求 与 交点的直角坐标，及 与 交点的直角坐标．

23．（2022·全国甲卷）已知a，b，c均为正数，且 ，证明：

（1） ；

（2）若 ，则 ．

**答案解析部分**

1．【答案】C

【知识点】复数的基本概念；复数代数形式的混合运算

【解析】【解答】解：由题意得， ，  
则  
则 .  
故选：C  
【分析】由共轭复数的概念及复数的运算即可得解.

2．【答案】B

【知识点】众数、中位数、平均数；极差、方差与标准差

【解析】【解答】解：对于A，讲座前中位数为， 所以A错；  
对于B，讲座后问卷答题的正确率只有1个是80%，4个85%，剩下全部大于等于90%， 所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85% ，所以B对；  
对于C，讲座前问卷答题的正确率更加分散，所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差，所以C错；  
对于D，讲座后问卷答题的正确率的极差为100%-80%=20% ，  
讲座前问卷答题的正确率的极差为95%-60%=35%>20% ，所以D错.  
故选：B.  
【分析】由图表信息，结合中位数、平均数、标准差、极差的概念，逐项判断即可得解.

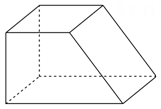
3．【答案】D

【知识点】并集及其运算；补集及其运算；一元二次方程

【解析】【解答】解：由题意得， ，所以A∪B={-1，1，2，3} ，  
 所以 .  
 故选：D  
 【分析】先求解方程求出集合B，再由集合的并集、补集运算即可得解.

4．【答案】B

【知识点】由三视图求面积、体积；棱柱、棱锥、棱台的体积

【解析】【解答】解：由三视图还原几何体，如图，  
  
则该直四棱柱的体积 .  
故选：B.  
【分析】由三视图还原几何体，再由棱柱的体积公式即可得解.

5．【答案】A

【知识点】函数奇偶性的性质；函数的值

【解析】【解答】解：由题意得，f(-x)=(3-x-3x)cos(-x)=-(3x-3-x)cosx=-f(x)，又   
所以f(x)为奇函数，排除BD；  
又当时，3x-3-x>0，cosx>0，所以f(x)>0，排除C.  
故选：A.  
  
【分析】由函数的奇偶性排除BD，结合指数函数、三角函数的性质逐项排除C，即可得解.

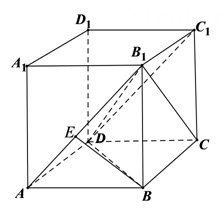
6．【答案】B

【知识点】利用导数研究函数的单调性；导数在最大值、最小值问题中的应用

【解析】【解答】因为函数f(x)定义域为（0，+∞），所以依题可知，f(1)=-2 ，f'(1)=0，  
又 ，  
则，解得 ，  
所以，  
由f'(x)>0，得0<x<1，由f'(x)<0，得x>1，  
因此函数f(x)在（0，1）上递增，在（1，+∞）上递减，  
则当x=1时取最大值，满足题意，即有．  
故选：B.  
  
【分析】根据题意可知f(1)=-2 ，f'(1)=0，列式即可解得a，b，再根据f'(x)即可解出．

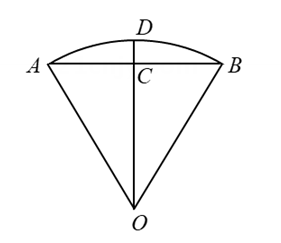
7．【答案】D

【知识点】直线与平面所成的角

【解析】【解答】解：如图所示：  
  
 不妨设AB=a，AD=b，AA1=c，依题以及长方体的结构特征可知， B1D与平面ABCD所成角为∠B1DB，  
 B1D与平面AA1B1B所成角为 ∠DB1A，  
 所以 ，  
 即b=c ， ，  
 解得 ．  
 对于A， AB=a，AD=b ，AB=AD ，A错误；  
 对于B，过B作BE⊥AB1于E，易知BE⊥平面AB1C1D，所以AB与平面AB1C1D所成角为∠BAE，  
 因为 ，所以 ，B错误；  
 对于C，，C错误；  
 对于D， B1D与平面BB1C1C所成角为∠DB1C ，又 ，而0°<∠DB1C<90°，所以∠DB1C=45° ．D正确．  
 故选：D．  
  
 【分析】先设AB=a，AD=b，AA1=c，再由题意得，b=c ，最后根据线面角的定义以及长方体的结构特征即可求出．

8．【答案】B

【知识点】扇形的弧长与面积

【解析】【解答】解：如图，连接OC，  
  
因为C是AB的中点，  
所以OC⊥AB，  
又CD⊥AB，所以O，C，D三点共线，  
即OD=OA=OB=2 ，  
又∠AOB=60° ，  
所以AB=OA=OB=2，  
则 ，  
故 ，  
所以 .  
故选：B.  
  
【分析】连接OC，分别求出AB，OC，CD，再根据题意的新定义即可得出答案.

9．【答案】C

【知识点】旋转体（圆柱、圆锥、圆台、球）

【解析】【解答】解：设母线长为l ，甲圆锥底面半径为r1，乙圆锥底面圆半径为r2，  
则，  
所以r1=2r2，  
又 ，  
则 ，  
所以 ，  
所以甲圆锥的高，  
乙圆锥的高 ，  
所以 .  
故选：C.  
  
【分析】设母线长为l ，甲圆锥底面半径为r1，乙圆锥底面圆半径为r2，根据圆锥的侧面积公式可得r1=2r2，再结合圆心角之和可将r1，r2分别用l表示，再利用勾股定理分别求出两圆锥的高，再根据圆锥的体积公式即可得解.

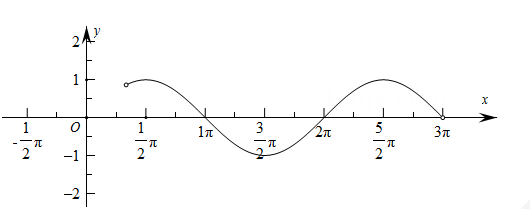
10．【答案】A

【知识点】斜率的计算公式；椭圆的简单性质

【解析】【解答】解：依题意易知A（-a，0） ，  
设P（x1，y1） ，则Q（-x1，y1），  
则 ，  
故 ，  
又 ，则 ，  
所以，  
即，  
所以椭圆C的离心率 .  
故选：A.  
  
【分析】设P（x1，y1） ，则Q（-x1，y1），根据斜率公式结合题意可得，再根据，将y1用x1表示，化简求得，再结合离心率公式即可得解.

11．【答案】C

【知识点】正弦函数的图象；正弦函数的零点与最值

【解析】【解答】解：依题意可得ω>0 ，因为x∈（0，π），所以 ，  
要使函数在区间（0，π）恰有三个极值点、两个零点，又y=sinx， 的图象如下所示：  
  
则，  
解得 ，  
即ω∈ ．  
故选：C  
  
【分析】由x的取值范围得到的取值范围，再结合正弦函数的性质得到不等式，解得即可．

12．【答案】A

【知识点】利用导数研究函数的单调性；单位圆与三角函数线

【解析】【解答】解：因为，因为当，sinx<x<tanx，   
所以 ，即， 所以c>b ；  
设，  
f'(x)=-sinx+x>0 ，所以f(x)在（0，+∞）单调递增，  
则， 所以 ，  
所以b>a， 所以c>b>a ，  
故选：A  
  
【分析】由结合三角函数的性质可得c>b；构造函数，利用导数可得b>a，即可得解.

13．【答案】11

【知识点】平面向量数量积的性质及其运算律；平面向量数量积的运算

【解析】【解答】解：由题意得  
所以 ．  
故答案为：11 ．  
  
【分析】先根据数量积的定义求出，最后根据数量积的运算律计算可得答案．

14．【答案】

【知识点】点到直线的距离公式；圆的标准方程；圆的一般方程；双曲线的简单性质

【解析】【解答】解：双曲线 的渐近线为 ，即x±my=0，不妨取x+my=0，  
圆，即x2+(y-2)2=1 ，所以圆心为（0，2），半径r=1，  
依题意圆心（0，2）到渐近线x+my=0的距离 ，  
解得或（舍去）．  
故答案为： ．  
  
【分析】首先求出双曲线的渐近线方程，再将圆的方程化为标准式，即可得到圆心坐标与半径，依题意圆心到直线的距离等于圆的半径，即可得到方程，解得即可．

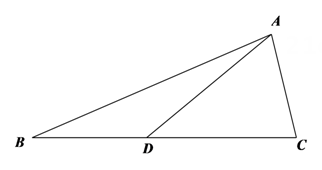
15．【答案】

【知识点】古典概型及其概率计算公式

【解析】【解答】解：从正方体的8个顶点中任取4个，有 个结果，这 个点在同一个平面的有m=6+6=12个，  
故所求概率．  
故答案为： ．  
  
【分析】直接根据古典概型的概率公式即可求出．

16．【答案】 或

【知识点】基本不等式在最值问题中的应用；余弦定理的应用

【解析】【解答】解：设CD=2BD=2m>0，  
  
 则在△ABD中，AB2=BD2+AD2-2BD·ADcos∠ADB=m2+4+2m ，  
 在△ACD中，AC2=CD2+AD2-2CD·ADcos∠ADC=4m2+4-4m ，  
 所以 ，  
 当且仅当即时，等号成立，  
 所以当取最小值时，，即BD= .  
 故答案为： .  
 【分析】设CD=2BD=2m>0，利用余弦定理表示出后，结合基本不等式即可得解.

17．【答案】（1）已知 ，即 ①，

当 时， ②，

①-②得， ，

即 ，

即 ，所以 ， 且 ，

所以 是以1为公差的等差数列．

（2）由（1）中 可得， ， ， ，

又 ， ， 成等比数列，所以 ，

即 ，解得 ，

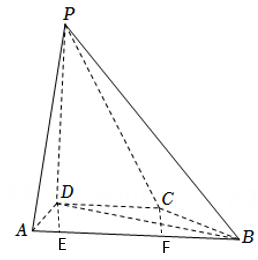
所以 ，所以 ，

所以，当 或 时 ．

【知识点】等差数列；等差数列的前n项和；等比数列的性质；数列递推式

【解析】【分析】（1）依题意可得 ，根据 ，作差即可得到 ，从而得证；

（2）由（1）及等比中项的性质求出a1，即可得到{an}的通项公式与前n项和，再根据二次函数的性质计算可得．

18．【答案】（1）证明：在四边形 中，作 于 ， 于 ，  


因为 ，

所以四边形 为等腰梯形，

所以 ，

故 ， ，

所以 ，

所以 ，

因为 平面 ， 平面 ，

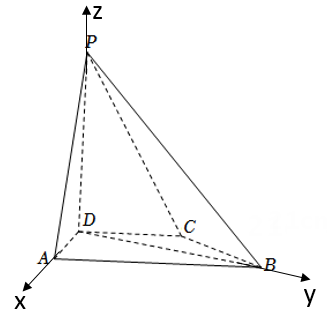
所以 ，

又 ，

所以 平面 ，

又因 平面 ，

所以

（2）解： 由(1)知，PD，AD，BD两两垂直， ，建立空间直角坐标系如图所示，  
  
 则

∴

设平面PAB的法向量为 ，则

即

不妨设 ，则 ，

设PD与平面PAB的所成角为θ，则

∴PD与平面PAB的所成的角的正弦值为 .

【知识点】直线与平面垂直的判定；直线与平面垂直的性质；用空间向量求直线与平面的夹角

【解析】【分析】（1）作 于 ， 于 ，利用勾股定理证明AD⊥BD ，根据线面垂直的性质可得，从而可得 平面，再根据线面垂直的性质即可得证；

（2）依题意建立恰当的空间直角坐标系，利用向量法即可得出答案.

19．【答案】（1） 解：设甲在三个项目中获胜的事件依次记为A，B，C，所以甲学校获得冠军的概率为  
 P=  
 =0.5x0.4x0.8+0.5x0.4x0.8+0.5x0.6x0.8+0.5x0.4x0.2  
 =0.16+0.16+ 0.24+0.04  
 =0.6.

（2）解：依题可知，X的可能取值为 ，所以，

，

，

，

.

即X的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 10 | 20 | 30 |
| P | 0.16 | 0.44 | 0.34 | 0.06 |

期望

【知识点】互斥事件的概率加法公式；相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量及其分布列；离散型随机变量的期望与方差

【解析】【分析】（1）设甲在三个项目中获胜的事件依次记为A，B，C，再根据甲获得冠军则至少获胜两个项目，利用互斥事件的概率加法公式以及相互独立事件的乘法公式即可求出；

（2）依题可知，X的可能取值为 ，再分别计算出对应的概率，列出分布列，即可求出期望．

20．【答案】（1）解：抛物线的准线为 ，当 与x轴垂直时，点M的横坐标为p，

此时 ，所以 ，

所以抛物线C的方程为 ；

（2）解：设 ，直线 ，

由 可得 ， ，

由斜率公式可得 ， ，

直线 ，代入抛物线方程可得 ，

，所以 ，同理可得 ，

所以

又因为直线MN、AB的倾斜角分别为 ，

所以 ，

若要使 最大，则 ，

设 ，则 ，

当且仅当 即 时，等号成立，

所以当 最大时， ，设直线 ，

代入抛物线方程可得 ，

，所以 ，

所以直线 .

【知识点】抛物线的定义；抛物线的标准方程；直线与圆锥曲线的关系；直线与圆锥曲线的综合问题

【解析】【分析】（1）由抛物线的定义可得，即可得解；

（2）设点的坐标及直线MN：x=my+1，由韦达定理及斜率公式可得KMN=2KAB，再由差角的正切公式及基本不等式可得 ，设直线AB：，结合韦达定理可解.

21．【答案】（1） 解： 由题意得，函数f(x)的定义域为 ，  
 ，  
 令f'(x)=0， 得x=1 ，  
 当x∈（0，1），f'(x)<0， f(x)单调递减，  
 当x∈（1，+∞），f'(x)>0， f(x)单调递增 ，  
 若f(x)≥0，则e+1-a≥0， 即a≤e+1 ，  
 所以a的取值范围为（-∞，e+1）

（2）证明：由题知， 一个零点小于1，一个零点大于1

不妨设

要证 ，即证

因为 ，即证

因为 ，即证

即证

即证

下面证明 时，

设 ，

则

设

所以 ，而

所以 ，所以

所以 在 单调递增

即 ，所以

令

所以 在 单调递减

即 ，所以 ；

综上， ，所以

【知识点】利用导数研究函数的单调性；导数在最大值、最小值问题中的应用

【解析】【分析】（1）由导数确定函数单调性及最值，即可得解；

（2）由化归思想，将原问题转化要证明 恒成立问题 ，构造函数 ， 再利用导数研究函数的单调性与最值即可得证.

22．【答案】（1）解：因为 ， ，所以 ，即  普通方程为 ．

（2）解：因为 ，所以 ，即 的普通方程为 ，

由 ，即 的普通方程为 ．

联立 ，解得： 或 ，即交点坐标为 ， ；

联立 ，解得： 或 ，即交点坐标  ， ．

【知识点】直线与圆锥曲线的关系；参数方程化成普通方程

【解析】【分析】(1)消去参数t，即可得到C1的普通方程；

(2)将曲线C2，C3的方程化成普通方程，联立求解即解出．

23．【答案】（1）证明：由柯西不等式有 ，

所以 ，

当且仅当 时，取等号，

所以

（2）证明：因为 ， ， ， ，由（1）得 ，

即 ，所以 ，

由权方和不等式知 ，

当且仅当 ，即 ， 时取等号，

所以 .

【知识点】一般形式的柯西不等式

【解析】【分析】（1）根据a2+b2+4c2=a2+b2+(2c)2，利用柯西不等式即可得证；

（2）由（1）结合已知可得 ，即可得到 ，再根据权方和不等式即可得证.